ФМИ НЛО 2018 - Домашна работа 2

Янис Василев, ianis@ivasilev.net, спец. Статистика, ф.н. 128

2 юни 2018

Задача 1

С помощта на методите на нелинейното оптимиране решете задачата:

$$\min_X f(x,y) = x^2 + 4y^2 - 4x - 8y,$$

където $X \subseteq \mathbb{R}^2$ се задава от ограниченията

$$xy - 2x + y \leq 1, \tag{1}$$
$$x \geq 0. \tag{2}$$

Решение. Функцията $g(x,y) = xy - 2x + y - 1$, породена от 1, не е изпъкнала, тъй като хесианът

$$H_g(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

има детерминанта $-1 < 0$.

От друга страна, ограниченията задават затворено множество, а функцията

$$f(x,y) = x^2 + 4y^2 - 4x - 8y = (x-2)^2 + (2y-2)^2 - 8 = \|(x-2, 2y-2)\|^2 - 8$$

е коерцитивна, т.е. $\lim\limits_{\|(x,y)\| \to +\infty} f(x,y) = +\infty$. Следователно f достига инфимума си в X и задачата има решение, което можем да намерим с помощта на теоремата на Джон, тъй като и f, и двете ограничения са диференцируеми.

Образуваме функцията на Лагранж

$$L(x,y,\mu) = \mu_0(x^2 + 4y^2 - 4x - 8y) + \mu_1(xy - 2x + y - 1) + \mu_2(-x).$$

Необходимо условие, за да бъде точката $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ оптимално решение, е да бъдат удовлетворени условията 1, 2 и

$$L'_x = \mu_0(2x-4) + \mu_1(y-2) - \mu_2 = 0, \tag{3}$$
$$L'_y = \mu_0(8y-8) + \mu_1(x+1) = 0, \tag{4}$$
$$\mu_1(xy - 2x + y - 1) = 0, \tag{5}$$
$$\mu_2(-x) = 0 \iff \mu_2 x = 0. \tag{6}$$

за някое $\mu = (\mu_0, \mu_1, \mu_2) \geq \vec{0}$ и $\mu \neq \vec{0}$.

сл. 1: $\mu_0 = 0$

Тогава от 4 и неотрицателността на $x \implies \mu_1 = 0$. При $x = 0$ от 3 $\implies \mu_2 = 0$, а при $x > 0$ от 6 $\implies \mu_2 = 0$. Но това противоречи на условието $\mu \neq \vec{0}$.

сл. 2: б.о.о $\mu_0 = 1$

сл. 2.1: $\mu_1 = 0$

Тогава 4 $\implies y = 1$ и 3 $\implies \mu_2 = 2x - 4$. Заместваме последното в 6 и получаваме $(x-2)x = 0 \implies x \in \{0, 2\}$. Но при $x = 0$ имаме $\mu_2 = -4 < 0$. Следователно $x = 2$ и точката $(2, 1)$ е кандидат за решение.

сл. 2.2: $\mu_1 > 0$ **и** $x = 0$

Тогава 5 $\implies \mu_1(y-1) = 0 \implies y = 1$. Като заместим $y = 1$ в 3, обаче, получаваме $\mu_1 + \mu_2 = -4$, което противоречи на неотрицателността на μ_1 и μ_2.

сл. 2.3: $\mu_1 > 0$ **и** $x > 0$

Тогава 6 $\implies \mu_2 = 0$. От 5 пък следва $x(y-2) = 1 - y$.

сл. 2.3.1: $y = 2$ Тогава 3 $\implies x = 2$, а точката $(2, 2)$ не удовлетворява 1.

сл. 2.3.2: $y > 2$ Изразяваме

$$x = \frac{1-y}{y-2} = \frac{-1}{y-2} - 1 = \frac{1}{2-y} - 1.$$

Тъй като $x > 0$, трябва

$$\begin{aligned} \frac{1}{2-y} &> 1 \,\Big|(2-y) \\ 1 &< 2 - y \\ y &< 1, \end{aligned}$$

което противоречи на $y > 2$.

сл. 2.3.3: $y < 2$ Аналогично на предния случай, решаваме уравнението

$$x = \frac{1}{2-y} - 1 > 0.$$

Този път получаваме

$$\begin{aligned} \frac{1}{2-y} &> 1 \Big| (2-y) \\ 1 &> 2-y \\ y &> 1, \end{aligned}$$

тоест $y \in (1, 2)$. Същевременно, 3 ни дава

$$y = 1 - \frac{\mu_1}{8}(x+1) < 1,$$

което противоречи на $y > 1$.

И така, единствен кандидат за решение е точката $(2, 1)$, в която имаме $f(2, 1) = 0$. Всъщност това е и глобалният минимум на f.

Задача 2

С помощта на методите на нелинейното оптимиране решете задачата:

$$\min_X f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x - 8y + 2,$$

където $X \subseteq \mathbb{R}^2$ се задава от ограниченията

$$\begin{aligned} &x^2 + y^2 + 6x - 2y \leq -5, \\ &x - y^2 + 2y \geq -1. \end{aligned}$$

Решение. Функциите f и

$$\begin{aligned} g_1(x, y) &= x^2 + y^2 + 6x - 2y + 5 \\ g_2(x, y) &= y^2 - 2y - x - 1 \end{aligned}$$

са (безкрайно) гладки и изпъкнали. Наистина, техните хесиани са неотрицателно дефинитни:

$$\begin{aligned} H_f(x, y) &= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2E, \\ H_{g_1}(x, y) &= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2E, \\ H_{g_2}(x, y) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Освен това точката $(-1, 1)$ удовлетворява условието на Слейтър. Това ни позволява да използваме диференциалната форма на теоремата на Кун и Такър.

Образуваме функцията на Лагранж

$$L(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 - 2x - 8y + 2 + \lambda_1(x^2 + y^2 + 6x - 2y + 5) + \lambda_2(y^2 - 2y - x - 1),$$

където $\lambda \in \mathbb{R}^2_+$. Тогава теоремата на Кун и Такър ни дава следните условия

$$L'_x = 2x - 2 + 2\lambda_1 x + 6\lambda_1 - \lambda_2 = 0, \tag{1}$$
$$L'_y = 2y - 8 + 2\lambda_1 y - 2\lambda_1 + 2\lambda_2 y - 2\lambda_2 = 0, \tag{2}$$
$$L'_{\lambda_1} = x^2 + y^2 + 6x - 2y + 5 \leq 0, \tag{3}$$
$$L'_{\lambda_2} = y^2 - 2y - x - 1 \leq 0, \tag{4}$$
$$\lambda_1 L'_{\lambda_1} = 0, \tag{5}$$
$$\lambda_2 L'_{\lambda_2} = 0, \tag{6}$$
$$\lambda_1 \geq 0, \tag{7}$$
$$\lambda_2 \geq 0. \tag{8}$$

Преди всичко да забележим, че можем да изразим x и y чрез λ_1 и λ_2 (от 1 и 2):

$$x = \frac{\lambda_2 + 8}{2\lambda_1 + 2} - 3$$
$$y = 1 + \frac{3}{1 + \lambda_1 + \lambda_2} > 0.$$

Освен това, като извадим 4 от 3, получаваме

$$x^2 + 7x + 6 \leq 0, \tag{9}$$

откъдето, в частност, следва, че $x < 0$.

сл. 1: $\lambda_1 = 0$

Тогава $x = \frac{\lambda_2+8}{2} - 3 = \frac{\lambda_2}{2} + 1 > 0$, но x е отрицателно.

сл. 2: $\lambda_1 > 0$ & $\lambda_2 = 0$

Тогава 3 трябва да бъде изпълнено като равенство:

$$x^2 + y^2 + 6x - 2y + 5 = 0,$$
$$(x + 3)^2 + (y - 1)^2 - 5 = 0,$$
$$\left(\frac{4}{\lambda_1 + 1}\right)^2 + \left(\frac{3}{\lambda_1 + 1}\right)^2 = 5,$$
$$\frac{25}{(\lambda_1 + 1)^2} = 5,$$
$$(\lambda_1 + 1)^2 = 5,$$

следователно $\lambda_1 = \sqrt{5} - 1$ и

$$x = \frac{4}{\sqrt{5}} - 3$$
$$y = \frac{3}{\sqrt{5}} + 1$$

Но тогава не е изпълнено условието 4.

сл. 3: $\lambda_1 > 0$ & $\lambda_2 > 0$

Тогава 9 трябва да бъде изпълнено като равенство $\implies$ $x = -1$. От 1 пък следва, че $\lambda_2 = 4(\lambda_1 - 1)$, което заедно с 8 влече $\lambda_1 \geq 1$, а последното ни показва, че 3 трябва да бъде изпълнено като равенство, т.е. $x^2 + y^2 + 6x - 2y + 5 = 0 \implies y^2 - 2y = 0 \implies y \in \{0, 2\}$. Но $y > 0$, следователно $y = 2$. Точката $(-1, 2)$ изпълнява условията 1-8 и следователно е кандидат за решение, при това единствен. Стойността на функцията в тази точка е $f(-1, 2) = 1$.